

Mecánica Estadística

15/05/2026

Cuestiones

- (1 punto) *Volumen fásico y densidad de estados.* Obténgase el volumen fásico y la densidad de estados de un péndulo simple de masa m y longitud l en el régimen de pequeñas oscilaciones. Adóptese como origen de potenciales el punto más bajo de su trayectoria de modo que $V(\theta) = mgl(1 - \cos \theta)$.
- (1 punto) *Teoría de fluctuaciones de Einstein.* En un experimento consistente en lanzar N monedas no trucadas, obténgase el número de microestados con n caras, $\Gamma(n)$, y la entropía del sistema en dicho estado, $S(n)$. Aplicando la teoría de fluctuaciones de Einstein obténgase la probabilidad de un microestado con n caras, $P(n)$. ¿A qué distribución de probabilidad corresponde? Demuéstrese, aplicando la aproximación de Stirling a este resultado, que en el límite $N, n \rightarrow \infty$ la distribución de la fracción de caras $x = n/N$ tiende a:

$$P(x) \propto \exp \left[-2N \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \right]$$

Nota: Para la última demostración resulta útil escribir $n = N/2 + \delta n$, aplicar la aproximación de Stirling y retener todos los términos de segundo orden en la fluctuación δn .

- (1 punto) *Factorización de la función de partición.* Demuéstrese la factorización de la función de partición canónica de un sistema de partículas idénticas, independientes y distinguibles (localizadas). Obténgase, a partir del resultado anterior, la función de partición de partículas indistinguibles en el límite diluido.
- (1 punto) *Plasma.* Considérese un plasma de electrones e iones positivos en equilibrio térmico a temperatura $T = 10^4$ K, contenido en un volumen V y de densidad electrónica $n_e = N_e/V = 10^{20} \text{ e}^- \text{ m}^{-3}$.
 - Calcúlese la longitud de onda de de Broglie de los electrones en las condiciones señaladas y, a partir de esta, justifíquese si los electrones del plasma pueden describirse mediante la estadística clásica de Maxwell-Boltzmann.
 - En caso afirmativo, obténgase la función de partición canónica del gas ideal de N_e electrones indistinguibles suponiendo que cada electrón estuviese sometido a un potencial efectivo constante (U_{eff}) asociado a su interacción con el resto del sistema.
 - Calcúlese la energía interna de los electrones del plasma.

Problemas

- (1,5 puntos) *Evolución hacia el equilibrio de un sistema de espines.* Considérese un sistema de N espines $1/2$ localizables (por ejemplo, asociados a los iones de un cristal), en presencia de un campo magnético aplicado H y en contacto con un termostato que le impone una temperatura canónica T .
 - Escríbese el valor medio de la magnetización del sistema de espines, $\langle M \rangle$, en función del valor medio de la magnetización de un espín dado, $\langle \mu \rangle$. Justifíquese esta factorización de $\langle M \rangle$.
 - Escríbese la evolución temporal de $\langle M \rangle(t)$ en función de las probabilidades $p_+(t)$ y $p_-(t)$ de orientación de cada espín individual.
 - Escríbanse las ecuaciones maestras canónicas que gobiernan la evolución temporal de $p_+(t)$ y $p_-(t)$ suponiendo que las probabilidades de transición entre los microestados individuales son w_{+-} y w_{-+} .
 - ¿Cuál es la relación entre w_{+-} y w_{-+} ?
 - Calcúlese $d\langle M \rangle(t)/dt$ en función de las probabilidades de transición individuales.
 - Calcúlese el valor medio $\langle M \rangle(t)$ en función de $\langle M \rangle(0)$ y el valor de dicha magnetización a tiempos muy largos $t \rightarrow \infty$.
- (1,5 puntos) *Principio de entropía máxima y distribución de Pareto.* En sistemas complejos (Física, Economía, Biología...) es muy frecuente la ocurrencia de leyes de distribución de probabilidad potenciales, $p(x) \propto |x|^{-\alpha}$, asociadas a ocurrencia de eventos extremos e invariancia de escala. Así, por ejemplo, en Economía la probabilidad de que un individuo tenga una riqueza o un ingreso ω_i sigue la distribución de Pareto:

$$p(\omega_i) = \alpha \frac{\omega_{\min}^\alpha}{\omega_i^{\alpha+1}} \quad \omega_i \geq \omega_{\min},$$

donde α es el índice de desigualdad y $\omega_{\min}$ la renta mínima.

Para estudiar este fenómeno, considérese una economía formada por N individuos cada uno de los cuales puede estar en un nivel de riqueza $\omega_i, i = 1, 2, \dots$ (variable aleatoria discreta) con una probabilidad $\{p_i\} \equiv \{p(\omega_i)\}$. Supongamos que la economía se encuentra en una situación en la que la riqueza media global está fijada, $\langle \omega \rangle = \text{cte}$. Calcúlese la distribución $\{p_i\}$ óptima aplicando el principio de entropía máxima de Jaynes a las medidas de información:

$$\begin{aligned} \text{i) } S\{p_i\} &= -k \sum_i p_i \ln p_i \quad \text{Boltzmann-Gibbs-Shannon} \\ \text{ii) } S_q\{p_i\} &= k \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q-1} \quad \text{Tsallis} \end{aligned}$$

¿Cuál de los dos resultados obtenidos permite recuperar la distribución de Pareto de renta? Obténganse, en ese caso, los multiplicadores indeterminados de Lagrange en términos de los parámetros de la distribución de Pareto.

3. (1,5 puntos) *Condensación de Bose-Einstein.* Obténgase la densidad de estados y la fracción de bosones condensados en el estado fundamental de un sistema de bosones de masa m y spin s en situación gran-canónica en los siguientes casos: i) partículas no relativistas en una caja de volumen V , ii) partículas ultrarrelativistas en una caja de volumen V ($mc^2 \ll pc$), iii) bosones no relativistas en un potencial armónico tridimensional anisótropo de frecuencia promedio $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$. Represéntese gráficamente la fracción condensada de bosones $\bar{N}_0/\bar{N}$ frente a la correspondiente temperatura reducida T/T_B en los tres casos anteriores y coméntese el resultado.

4. (1,5 puntos) *Termodinámica del gas ideal de fermiones.* Considérese un gas ideal degenerado de N fermiones de spin $s = 1/2$ en un recinto bidimensional de área A en dos casos diferentes: no relativista y ultrarrelativista.

i) Calcúlese la densidad de estados, $g_{NR}(\epsilon)$ y $g_{UR}(\epsilon)$, para ambos casos.

ii) Calcúlense las capacidades caloríficas para el gas en ambas situaciones, C^{NR} y C^{UR} .
Nota: Supóngase que únicamente contribuyen a la capacidad calorífica los fermiones situados en una banda de anchura de orden $k_B T$ en las inmediaciones de la energía de Fermi.

iii) Determínese, dentro de esta aproximación, la temperatura T_c para la cual se tendría $C^{NR} = C^{UR}$.

iv) Discútase bajo qué condiciones la temperatura T_c obtenida tendría significado físico dentro de la aproximación utilizada.

Relaciones matemáticas de posible utilidad:

Aproximaciones

$$\ln N! \approx N \ln N - N; \text{ para } N \rightarrow \infty$$

$$\ln(1 + \alpha x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (\alpha x)^n$$

$$\ln(1 - \alpha x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n}; \text{ para } 0 < x < 1$$

Función Γ

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx;$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x);$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!}{4^n (n!)} \sqrt{\pi}; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Función ζ de Riemann

$$g_k(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n^k}$$

$$g_k(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \equiv \zeta(k); \quad \zeta(1) \rightarrow \infty$$

$$\frac{dg_k(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} g_{k-1}(\lambda)$$

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2,61; \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(3) \approx 1,20; \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$f_k(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\lambda^n}{n^k}$$

Integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}+c}$$

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx; \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{2a} I_n$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt = \text{erf}(x)$$

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x - 1} dx = \Gamma(n+1) \zeta(n+1), \text{ para } n > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x + 1} dx = (1 - 2^{-n}) \Gamma(n+1) \zeta(n+1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} dx = 1$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \frac{a^{-n/2-1/2}}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Varios

Volumen de una hipersfera de radio r en D dimensiones:

$$V_D = \frac{r^D \pi^{D/2}}{\Gamma(D/2 + 1)}$$

Función de Langevin

$$L(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}$$

Teorema multinomial

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n \\ n_i \geq 0}} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

$$(a+b)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} a^n b^{N-n}; \quad \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} = 2^N$$

Constantes físicas de interés

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/mol K Cte. Boltzmann}$$

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ Cte. Planck}$$

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg masa del electrón}$$

$$m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg masa del neutrón}$$

$$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg masa del protón}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C carga del electrón}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \text{ velocidad de la luz}$$

$$\mu_N = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ J T}^{-1} \text{ magnetón nuclear}$$

$$\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1} \text{ magnetón de Bohr}$$